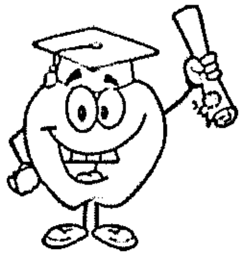


الرياضيات

8

التحليل (5)

9

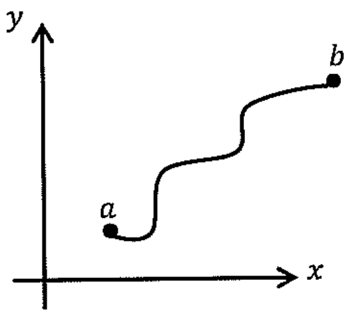
السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

سوف نتناول بهذه المحاضرة الفقرة الأخيرة من الفص الأول بمقررنا وهي تطبيقات الدوال ذات التغير المحدود

تطبيقات د.ت.م



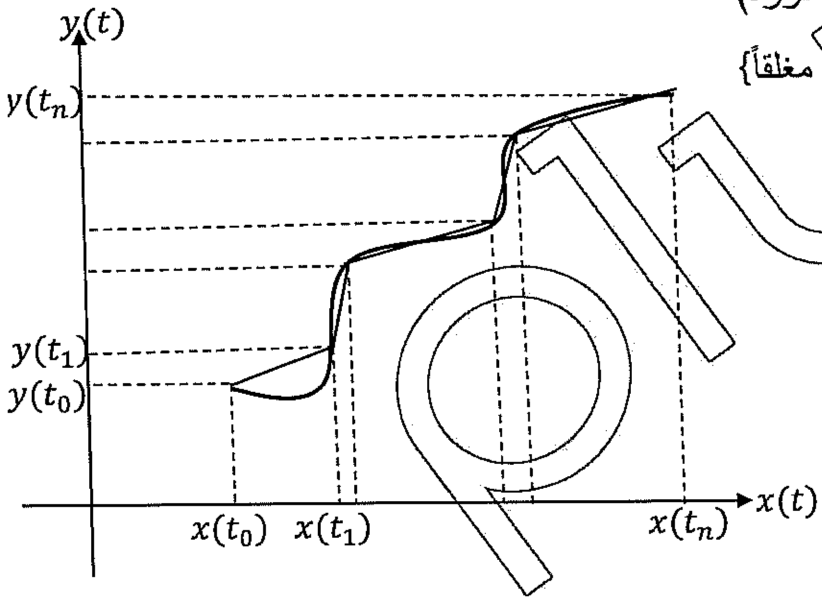
تعريف المنحني المجمع:

ليكن C منحني معرف وسيطياً **في المستوي** بالشكل:

$$x(t) = \varphi(t)$$
$$y(t) = \psi(t) \quad ; t \in [\alpha, \beta]$$

وكان المنحني لا يحوي على نقاط مضاعفة (مكررة)

{باستثناء البداية والنهاية في حال كان المنحني مغلقاً}



نأخذ تجزئة للمجال $[\alpha, \beta]$

$$P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$$

لتكن النقاط $A_0, A_1, \ldots, A_n$

نقاط على المنحني حيث

$$A_k = \big(x(t_k), y(t_k)\big)$$

نأخذ المجموع التالي:

(هو مجموع المسافات بين النقاط A_k)

(قانون طول قطعة مستقيمة $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$)

$$l(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

ونأخذ $L = \sup\limits_{P \in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} l(P)$

إن C منحني مجمع إذا وفقط إذا كان $L < \infty$.

و**في الفراغ** يكون لدينا 3 وسطاء

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t) \\ y(t) &= \psi(t) \quad ; t \in [\alpha, \beta] \\ z(t) &= \emptyset(t) \end{aligned}$$

ويكون

$$l(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_k) - x(t_{k-1})\right)^2 + \left(y(t_k) - y(t_{k-1})\right)^2 + \left(z(t_k) - z(t_{k-1})\right)^2}$$

ونأخذ $L = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} l(P)$

إن C منحني مجمع إذا وفقط إذا كان $L < \infty$.

نظرية جوردان:

الشرط الازم والكافي يكون المنحني C مجمعاً هو أن تكون كلاً من الدالتين $x(t), y(t)$ د.ت.م على $[\alpha, \beta]$

C منحني مجمع $\Leftrightarrow$ $x(t), y(t)$ دالتين ذ.ت.م على $[\alpha, \beta]$.

البرهان:

C:($\Leftarrow$) منحني مجمع $\Leftarrow$ $x(t), y(t)$ دالتين ذ.ت.م على $[\alpha, \beta]$

لنأخذ تجزئة للمجال$[\alpha, \beta]$ وهي $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$

بفرض (C) منحني قابل للتجميع أي $L = \sup_{p \in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} L(p) < \infty$

ولنبرهن أن $x(t)$, $y(t)$ دوال ذات تغير محدود على $[\alpha, \beta]$.

أي لنبرهن أن:

$$\bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) < \infty \quad \& \quad \bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) < \infty$$

$$l(P) = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\underbrace{\left(x(t_k) - x(t_{k-1})\right)}_{a_k}^2 + \underbrace{\left(y(t_k) - y(t_{k-1})\right)}_{b_k}^2}$$

$$|a_k| = \sqrt{a_k^2} \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|a_k| = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_k^2} \leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

$$|b_k| = \sqrt{b_k^2} \leq \sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|b_k| = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_k^2} \leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

لدينا:

$$|x(t_i)-x(t_{i-1})| \leq \sqrt{\left(x(t_i)-x(t_{i-1})\right)^2+\left(y(t_i)-y(t_{i-1})\right)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x(t_i)-x(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_i)-x(t_{i-1})\right)^2+\left(y(t_i)-y(t_{i-1})\right)^2} = l(P)$$

$$V(x(t),P) = \sum_{i=1}^{n}|x(t_i)-x(t_{i-1})| \leq L$$

بأخذ sup للطرفين:

$$\Longrightarrow \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\vee}} x(t) \leq L < +\infty$$

ومنه $x(t)$ دالة ذات تغير محدود على $[\alpha,\beta]$.

وكذلك:

$$\sum_{i=1}^{n}|y(t_i)-y(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_i)-x(t_{i-1})\right)^2+\left(y(t_i)-y(t_{i-1})\right)^2} = l(P)$$

$$V(y(t),P) = \sum_{i=1}^{n}|y(t_i)-y(t_{i-1})| \leq L$$

بأخذ sup للطرفين:

$$\Longrightarrow \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\vee}} y(t) \leq L < +\infty$$

ومنه $x(t)$ دالة ذات تغير محدود على $[\alpha,\beta]$.

البرهان $(\Rightarrow)$: $x(t), y(t)$ د.ت.م على $[\alpha,\beta] \Leftarrow C$ منحني مجمع أي

$$L = \sup_{p\in P[\alpha,\beta]} L(p) < \infty$$

لنأخذ تجزئة للمجال $[\alpha,\beta]$ وهي $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$

$$l(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right)^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i-1})\right)^2}$$

حسب الخاصة:

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq |a_k| + |b_k|$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq \sum_{i=1}^{n} [|a_k| + |b_k|]$$

$$\sqrt{\left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right)^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i-1})\right)^2}$$
$$\leq |x(t_i) - x(t_{i-1})| + |y(t_i) - y(t_{i-1})|$$

$$l(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right)^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i-1})\right)^2}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |y(t_i) - y(t_{i-1})|$$

$$l(P) \leq V(x(t), P) + V(y(t), P)$$

$$L \leq \bigvee_{\alpha}^{\beta} x(y) + \bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t)$$

$$L = \sup_{p\in P[\alpha,\beta]} l(P) < \infty$$

$\Leftarrow C$ منحني مجمع أي قابل للتجميع

ملاحظة: المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في الفراغ. وبرهانها بالفراغ بنفس الطريقة.

مثال:

أثبت أن المنحني التالي المعرف وسيطياً أنه مجمع:

$$x = t - \sin t$$
$$y = 1 - \cos t \qquad t \in [0,2\pi]$$

واحسب طوله.

الحل:

$$x = t - \sin t \Rightarrow x'(t) = 1 - \cos t \Rightarrow |x'(t)| = |1 - \cos t| \le 1 + |\cos t| \le 2$$

المشتق محدود على مجال التعريف ومنه x ذ.ت.م عليه.

$$y = 1 - \cos t \Rightarrow y'(t) = \sin t \Rightarrow |y'(t)| = |\sin t| \le 1$$

مشتق y محدود على المجال فهي ذ.ت.م عليه.

وحسب نظرية جوردان: C المعرف وسيطياً بـــ x, y هو منحني مجمع.

طول المنحني:

قانون طول المنحني:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$= -4\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = -4(-1 - 1) = 8$$

مثال2: (وظيفة☺)

أثبت أن المنحني التالي المعرف وسيطياً أنه مجمع:

$$x = \sin t$$
$$y = \cos t$$

بحيث $t \in [0,2\pi]$

واحسب طوله.

الحل:

$$x = \sin t \Rightarrow x'(t) = \cos t \Rightarrow |x'(t)| = |\cos t| \le 1$$

المشتق محدود على مجال التعريف ومنه x ذ.ت.م عليه.

$$y = \cos t \Rightarrow y'(t) = -\sin t \Rightarrow |y'(t)| = |-\sin t| \le 1$$

مشتق y محدود على المجال فهي ذ.ت.م عليه.

وحسب نظرية جوردان: C المعرف وسيطياً بـــ x, y هو منحني مجمع.

طول المنحني:

قانون طول المنحني:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

تمرين:

اكتب الدوال ذات التغير المحدود التالية على شكل فرق لدالتين متزايدتين

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{y = \sin x}$$

$$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{y = \cos x}$$

$$\mathbf{3)}\ \boldsymbol{y = |\cos x|}$$ (وظيفة)

على المجال $[\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$

الحل:

$$1)\ y = x - (x - \sin x) = f_1 - f_2$$

إن f_1 دالة متزايدة لأن:

$$f_1' = 1 > 0$$

إن f_2 دالة متزايدة لأن:

$$f_2' = 1 - \cos x \geq 0$$

ومنه $y = \sin x$ كتب على شكل فرق دالتين متزايدتين.

$$2) y = x - (x - \cos x) = f_1 - f_2$$

إن f_1 دالة متزايدة لأن:

$$f_1' = 1 > 0$$

إن f_2 دالة متزايدة لأن:

$$f_2' = 1 + \sin x \geq 0$$

ومنه $y = \cos x$ كتب على شكل فرق دالتين متزايدتين.

$$3)\ y=|\cos x|=\begin{cases}\cos x & ;\cos x\geq 0\\ -\cos x & ;\cos x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\cos x & ;x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\\ \cos x & ;x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\end{cases}=\begin{cases}\cos x-0 & ;x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0-\cos x & ;x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\\ \cos x-0 & ;x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\cos x & ;x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0 & ;x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\\ \cos x & ;x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\end{cases}-\begin{cases}0 & ;x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ \cos x & ;x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\\ 0 & ;x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\end{cases}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.

Math Mad Team